

Számítástudomány gyakorlat

Kedd 08:30-10:00, LD 3-715

8. feladatsor

1. Jelölje k -SAT azon kielégíthető konjunktív normálformák nyelvét, amelyekben minden klóz legfeljebb k elemű, SAT- k pedig azon konjunktív normálformákét, ahol minden változó legfeljebb k literálban fordul elő. Bizonyítsuk be (egyik volt előadáson), hogy

- a) 2-SAT P-beli,
- b) 3-SAT NP-teljes,
- c)^{HF} SAT-2 P-beli,
- d) SAT-3 NP-teljes.

2. Annak eldöntése, hogy természetes számok egy adott halmazát szét tudjuk-e osztani két egyenlő részre, NP-teljes.

3. Mutassuk meg, hogy a Steiner-fa feladat (adott csúcsokat tartalmazó minimális feszítőfa keresése élsúlyozott gráfban) NP-nehéz.

4. Adj egy (RAM gépen) $\tilde{O}(n^2)$ idejű randomizált algoritmust, ami eldönti input A, B, C $n \times n$ -es egész mátrixokról, hogy $A \cdot B = C$ igaz-e. Melyik osztályban van ez az algoritmus **RP**, **co-RP** és **BPP** közül?

5. Eldönthetelen egy leírásával adott randomizált, polinom időben futó Turing-gépről, hogy igaz-e, hogy minden x -et vagy legalább $1/2$ eséllyel elfogad, vagy biztosan elutasít.

6. Mutasd meg például a **BPP**-ről, hogy ekvivalens definíciókat kapunk, ha

- a) racionális számok az eloszlások (amik meghatározzák, hogy mikor merre lépünk tovább),
- b) csak egy darab állapot van, ami $1/2$ – $1/2$ eséllyel lép két másikba,
- c) van egy véletlen szalagunk, melynek minden mezője $1/2$ eséllyel 0 és 1,
- d) egy olyan pénzt „dobálhatunk”, ami valamilyen ismeretlen, konstans p eséllyel lesz fej.

7.* Mutasd meg, hogyha az eloszlásról csak azt tesszük fel, hogy rekurzív, akkor **BPP** $\not\subseteq$ **EXP**.

8. Legyen **PP** azon nyelvek osztálya, amikhez van minden inputra mindig polinomiális időben futó randomizált Turing-gép, ami $< 1/2$ eséllyel hibázik.

a)^{HF} Mutasd meg, hogy $\text{SAT} \in \text{PP}$.

b)^{HF} Mutasd meg, hogy ha a **PP**-t várható futásidővel definiáljuk, akkor az így kapott osztály pontosan a rekurzív nyelvek osztálya lesz.

9.^{HF} Hogyan tesztelhetjük le gyorsan (vagyis poly $\log(q)$ időben), hogy q prímhatvány-e?

A kurzus honlapján (http://gilyen.hu/teaching/Szamtud_2025.html) elérhetőek a (javított) feladatsorok és az órával kapcsolatos egyéb tudnivalók. A házi- és csillagos feladatokat a következő gyakorlat előtt tudjátok beadni, illetve csillagos feladatokat egészen addig amíg azokat „le nem lövük” előadáson vagy gyakorlaton.