

Számítástudomány gyakorlat

Kedd 08:30-10:00, LD 3-715

4. feladatsor

1.* Bizonyítsd be, hogy egy kétszalagos, egy szalagot csak olvasó, a másikon legfeljebb $o(\log \log n)$ tárt használó Turing-gép csak reguláris nyelvet tud felismerni.

Definíció: $L \in \mathbf{R}$ „recursive”, vagyis az L nyelv rekurzív, ha létezik Turing-gép, ami minden inputon megáll és ha $w \in L$, akkor 1-et ad ki, ha pedig $w \notin L$, akkor 0-t.

Definíció: Egy f függvény rekurzív, ha létezik Turing-gép, amely minden inputon megáll és a w inputra az outputja $f(w)$.

Definíció: $L \in \mathbf{RE}$ „recursive enumerable”, vagyis az L nyelv rekurzívan felsorolható, ha vagy $L = \emptyset$, vagy létezik f rekurzív függvény, hogy $L = \text{Im}(f)$.

Definíció: $L \in \mathbf{co-RE}$ „complement recursive enumerable”, vagyis az L nyelv co-rekurzívan felsorolható, ha $\bar{L} \in \mathbf{RE}$, ahol $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$.

Állítás: $L \in \mathbf{RE}$ pontosan akkor, ha létezik Turing-gép, amely pontosan az L -beli szavakra áll meg. (Következmény: ha L rekurzív, akkor rekurzívan felsorolható is.)

Állítás: $L \in \mathbf{R} \Leftrightarrow L \in \mathbf{RE}$ és $L \in \mathbf{co-RE}$.

2. Legyenek L_1 és L_2 rekurzívan felsorolható nyelvek. Mutasd meg, hogy $L_1 \cup L_2$ és $L_1 \cap L_2$ is rekurzívan felsorolható.

3. Tegyük fel, hogy L rekurzív és $L' \subset L$. Mutasd meg, hogy L' akkor és csak akkor rekurzív, ha rekurzívan felsorolható és $L \setminus L'$ is rekurzívan felsorolható.

4. Ha L rekurzívan felsorolható, de nem rekurzív és $L' \subset L$, akkor lehet-e L'

a) rekurzív?

b) co-rekurzívan felsorolható, de nem rekurzív?

5. Mutasd meg, hogy rekurzívan felsorolható, de nem rekurzív nyelv létezéséből következik Gödel első nemteljességi tétele, miszerint van olyan állítás, mely se nem bizonyítható, se nem cáfolható (bármely, néhány egyszerű követelménynek eleget tevő, rendszerben).

Definíció: Dominó-probléma: Ki akarjuk parkettázni a síkot egy véges dominó-készlettel, mely tartalmaz egy *Start* elemet, amit muszáj felhasználnunk.

6.^{HF} Eldönthető-e, hogy kiparkettázható-e a sík a készlettel, ha

a) a dominókat el szabad forgatni 180° -kal?

b) a dominókat el szabad forgatni a függőleges tengelyük körül?

(Azaz a függőleges tengelyre tükröztöttjük is a készletben van.)

c) a dominókat el szabad forgatni az *egyik* átlójuk körül?

(Azaz az átlóra tükröztöttjük is a készletben van.)

7.** Mutassuk meg, hogy van olyan (kötelezően felhasználandó *Start*-dominó NÉLKÜLI) dominókészlet, mellyel a sík kirakható, de nem rakható ki kétszeresen periodikusan (vagyis úgy, hogy alkalmas lineárisan független egész koordinátájú (p, q) és (r, s) vektorokra bármely (x, y) pontot ugyanolyan dominó fed le, mint az $(x + p, y + q)$ és $(x + r, y + s)$ pontot).

A kurzus honlapján (http://gilyen.hu/teaching/Szamtud_2025.html) elérhetőek a (javított) feladatsorok és az órával kapcsolatos egyéb tudnivalók. A házi- és csillagos feladatokat a következő gyakorlat előtt tudjátok beadni, illetve csillagos feladatokat egészen addig amíg azokat „le nem löjük” előadáson vagy gyakorlaton.